Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

« ΣΥΝΕΧΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ »

ΜΠΙΘΗΜΗΤΡΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ - ΣΤΕΛΛΑ

Επιβλέπουσα: Αν. Καθηγήτρια Λαμπροπούλου Σοφία

Σκοπός

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι:

- ✓ Η ανάπτυξη πραγματικών αριθμών σε συνεχή κλάσματα και τα βασικά θεωρήματα αυτής της ανάπτυξης.
- ✓ Η προσέγγιση των άρρητων αριθμών από συγκλίνοντες ρητούς.
- ✓ Η επίλυση διοφαντικών εξισώσεων μέσω των συνεχών κλασμάτων

Αριθμητικό παράδειγμα

Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση: $x^2 - 3x - 1 = 0.$

Αρχικά, διαιρούμε με *x* και προκύπτει: $x = 3 + \frac{1}{x}.$

Εν συνεχεία, αντικαθιστούμε το άγνωστο *x* από το ίσο του, $3 + \frac{1}{x}$ και συνεπάγεται ότι: $x = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{x}}.$

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία αρκετές φορές, προκύπτει μια έκφραση της μορφής:

$$x = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}}}}} \qquad (1)$$

Ωστόσο, το x εξακολουθεί να εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης και η λύση της δεν φαντάζει εφικτή. Αν απομονώσουμε διαδοχικά τα κλάσματα που προκύπτουν παραπάνω και εκτελώντας τις διαιρέσεις, είναι: 3, 10/3= 3.333…, 33/10 = 3.3, 109/33 = 3.30303.

Βασικοί ορισμοί

Κλάσματα όπως αυτά της μορφής (1) καλούνται **συνεχή κλάσματα**.

Η γενική μορφή συνεχούς κλάσματος είναι: $x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}.$ (2)

Το a_0 καλείται το ακέραιο μέρος και τα a_n, b_n είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί., μεταβλητές ή συναρτήσεις. Τα a_n καλούνται **μερικά πηλίκα** (partial quotients). Αν το κλάσμα έχει πεπερασμένους όρους καλείται **πεπερασμένο συνεχές κλάσμα** (terminating continued fraction) ενώ αν έχει άπειρους όρους καλείται **άπειρο συνεχές κλάσμα** (infinite continued fraction). Τα **απλά συνεχή κλάσματα** (simple continued fractions) έχουν τα b_n ίσα με 1, το a_0 ακέραιο, ακόμα και μηδέν και τα υπόλοιπα a_n θετικούς ακεραίους:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}.$$

.

Συνήθεις τρόποι αναπαράστασης συνεχών κλασμάτων είναι: $\sigma = [a_0, a_1, a_2, \dots]$,
$\sigma = [a_0 ; a_1, a_2, \dots]$, $\sigma = a_1 + \frac{1}{a_2 +} + \frac{1}{a_3 +} + \dots$

Ένα άπειρο απλό συνεχές κλάσμα ονομάζεται **περιοδικό** αν υπάρχουν *N*, *k* θετικοί ακέραιοι έτσι ώστε για όλα τα $n \geq N$, $a_n = a_{n+k}$. Αναπαριστούμε το κλάσμα: $[a_1, a_2, \dots, a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+k-1}, a_N, a_{N+1}, \dots]$ με πιο βολικό τρόπο ως εξής: $[a_1, a_2, \dots \overline{a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+k-1}}]$.

Ιστορικά στοιχεία

Παραδοσιακά, η αρχή της θεωρίας των συνεχών κλασμάτων τοποθετείται στην εποχή της δημιουργίας του αλγορίθμου του Ευκλείδη. Μαθηματικοί που συνέβαλαν σημαντικά σε αυτό τον τομέα είναι οι: Aryabhata, Wallis, Rafael Bombelli, Pietro Cataldi, Λόρδος Brouncker και Christiaan Huygens. Στην συνέχεια, ο κλάδος άνθησε με τους Leonard Euler, Johan Heinrich Lambert και Joseph Louis Lagrange.

Σημαντικές εκφράσεις

Euler

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{1}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cdots}}}},\quad \frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cdots}}}}.$$

Lambert

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\cdots}}}},\quad tan\,x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cdots}}}}.$$

Lagrange

$$(1+x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{kx}{1+\cfrac{\frac{1\cdot(1+k)}{1\cdot 2}x}{1+\cfrac{\frac{1\cdot(1-k)}{2\cdot 3}x}{1+\cfrac{\frac{2\cdot(2+k)}{3\cdot 4}x}{1+\cfrac{\frac{2\cdot(2-k)}{4\cdot 5}x}{1+\cdots}}}}}},\quad log\,\frac{1+x}{1-x}=\cfrac{2x}{1-\cfrac{1x^2}{3-\cfrac{4x^2}{5-\cfrac{9x^2}{7-\cfrac{16x^2}{9-\cdots}}}}}.$$

Πραγματικοί αριθμοί και συνεχή κλάσματα

Για την ανάπτυξη των πραγματικών αριθμών σε συνεχή κλάσματα, απαιτείται η γνώση του αλγορίθμου του Ευκλείδη. Δεδομένων δύο ακεραίων αριθμών *a*, *b* μπορούμε να βρούμε q_1, r_1 έτσι ώστε:

$$b = a \cdot q_1 + r_1, \;\; 0 \leq r_1 < |a|.$$

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για τους αριθμούς *a*, r_1 και προκύπτει:

$$a = r_1 \cdot q_2 + r_2, \;\; 0 \leq r_2 < |r_1|.$$

Συνεχίζοντας, θα πρέπει τελικά το υπόλοιπο να γίνει μηδέν, εφόσον τα r_i είναι ακέραιοι. Οι δύο τελευταίοι όροι της ακολουθίας είναι: $r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n, \;\; r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0$, όπου: $0 \leq r_n < |r_{n-1}|$ και $r_{n+1} = 0$.

Το r_n αποδεικνύεται ότι είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των *a* και *b*.

Ένας *ρητός* αριθμός είναι της μορφής: *p/q* με *p, q* να ανήκουν στο **Z** και $q \neq 0$. Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να παρασταθεί σαν ανάγωγο κλάσμα.

Αν $p/q > 0$, $p/q = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ και $\frac{q}{p} = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Αν $p/q < 0$, $p/q = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ με a_1 αρνητικό.

Άρρητος ονομάζεται ένας αριθμός που δεν μπορεί να παρασταθεί ως το πηλίκο δύο ακεραίων. Ο όρος **τετραγωνικός άρρητος** (quadratic irrational) αναφέρεται σε όλους τους αριθμούς της μορφής: $\frac{(A+D\sqrt{B})}{C}$,

όπου οι *A, C* και *D* είναι αυθαίρετοι ακέραιοι αριθμοί ενώ το *B* είναι ένας σταθερός θετικός ακέραιος, όχι τέλειο τετράγωνο. Ένας **αλγεβρικός αριθμός** (algebraic number) είναι ένας αριθμός x που ικανοποιεί μια αλγεβρική εξίσωση, δηλαδή μια εξίσωση με ακέραιους συντελεστές.

Αν *a* άρρητος, τότε το συνεχές κλάσμα του είναι άπειρο, $a = [a_1, a_2, \ldots]$.

Βασικά θεωρήματα ανάπτυξης των πραγματικών αριθμών – Ιδιότητες των αναγωγημάτων

.

<u>Θεώρημα 1:</u>

Κάθε απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα αναπαριστά έναν ρητό αριθμό. Αντίστροφα, κάθε ρητός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα. Αυτή η αναπαράσταση είναι μοναδική.

Το συνεχές κλάσμα $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k]$ με *k* έναν μη αρνητικό ακέραιο μικρότερο ή ίσο του *n*, καλείται το *k* τάξης **αναγώγημα** του συνεχούς κλάσματος: $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$. Συμβολίζεται και ως C_k και υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο τόσο για τους ρητούς όσο και για τους άρρητους.

Το αναγώγημα *n* τάξης συμβολίζεται ως:

$$c_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_{3+\cdots+\frac{1}{a_n}}}},$$

και ουσιαστικά αποτελεί το ίδιο το συνεχές κλάσμα, $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.

Ισχύει:

$$c_n = \frac{a_n . p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Θεώρημα 2:

Για ένα άπειρο ή πεπερασμένο συνεχές κλάσμα, ο αριθμητής p_i και ο παρονομαστής q_i του i-οστού αναγωγήματος C_i δίνονται, για όλα τα *i ≥ 1*, από τους επαναληπτικούς τύπους: $p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2}, q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2},$

όπου, κατά σύμβαση, θέτουμε: $p_{-1} = 0, \quad p_0 = 1, \quad q_{-1} = 1$ και $q_0 = 0.$

Θεώρημα 3 (Θεμελιώδης επαναληπτική σχέση)**:**

Έστω τα αναγωγήματα $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ ενός συνεχούς κλάσματος με:

$$p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2}, q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}.$$

Τότε ισχύει: $p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i$, με *i ≥ 0*.

Απόδειξη Θεωρήματος 3:

Η πρόταση αυτή θα αποδειχθεί με την μέθοδο της επαγωγής.

Ελέγχουμε αρχικά τις δύο βασικές περιπτώσεις, για *i = 0* και *i = 1*:

$$p_0 \cdot q_{-1} - p_{-1} \cdot q_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^0.$$

$$p_1 \cdot q_0 - p_0 \cdot q_1 = (a_1 \cdot p_0 + p_{-1}) \cdot 0 - 1 \cdot (a_1 \cdot q_0 + q_1)$$

$$= 0 - 1 \cdot (0 + 1) = -1 = -(1)^1.$$

Και οι δύο περιπτώσεις είναι αληθείς. Υποθέτουμε, τώρα, πως η πρόταση αληθεύει για όλα τα *i ≤ k* και θα δείξουμε πως αληθεύει και για *k+1*:

$$\begin{aligned} p_{k+1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k+1} \\ &= (a_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}) \cdot q_k - p_k \\ &\cdot (a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}) \\ &= a_{k+1} \cdot p_k \cdot q_k + p_{k-1} \cdot q_k - a_{k+1} \cdot q_k \cdot p_k - p_k \\ &\cdot q_{k-1} = p_{k-1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k-1} \\ &= -(p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k) = -(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Αφού ο ισχυρισμός αληθεύει για *k+1*, ισχύει και για όλους τους ακεραίους, επαγωγικά. ▪

Πόρισμα 1:

Τα αναγωγήματα $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$c_i - c_{i-1} = \frac{(-1)^i}{q_i \cdot q_{i-1}}$, *i ≥ 2*.

<u>Θεώρημα 4:</u>

Για κάθε *k ≥1*, ισχύει η αναδρομική σχέση: $p_{k-2}q_k - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1}a_k$.

Πόρισμα 2:

Κάθε αναγώγημα $c_i = p_i/q_i$, *i ≥ 1*, ενός απλού συνεχούς κλάσματος είναι ένα ανάγωγο κλάσμα, δηλαδή τα p_i και q_i δεν έχουν κοινό διαιρέτη εκτός του ±1.

<u>Θεώρημα 5:</u>

Για τα αναγωγήματα $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, για *n ≥ 3*, πληρείται η αναδρομική σχέση:

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-2}} .$$

Θεώρημα 6 (Lagrange):

Οι τετραγωνικοί άρρητοι είναι οι πραγματικοί αριθμοί που αναπαριστώνται από περιοδικά συνεχή κλάσματα.

Απόδειξη:

Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε κάποια λήμματα, ως ενδιάμεσα στάδια.

Λήμμα 1:

Αν x είναι ένας τετραγωνικός άρρητος και a_0 ένας ακέραιος, τότε ο: $a_0 + \frac{1}{x}$ είναι τετραγωνικός άρρητος.

Λήμμα 2:

Αν x τετραγωνικός άρρητος και $a_0, a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι, τότε ο αριθμός:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}}$$

είναι τετραγωνικός άρρητος.

Λήμμα 3:

Έστω $a_0, a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι αριθμοί. Τότε, ο αριθμός: $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}}$

μπορεί να γραφεί ως: $\frac{ax+b}{cx+d}$, με $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$.

Λήμμα 4:

Αν $a_0, a_1, \dots, a_n \in$ **Z**, τότε ο αριθμός x = $[\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$ είναι ένας τετραγωνικός άρρητος.

<u>Απόδειξη Θεωρήματος Lagrange:</u>

Στην γενική περίπτωση, ο αριθμός x δεν εμφανίζει περιοδικότητα, απευθείας.

Αν $b_0, b_1, \dots, b_m, a_0, a_1, \dots, a_n \in$ **Z**, τότε ο αριθμός $x = [b_0, b_1, \dots, b_m, \overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$ είναι ένας τετραγωνικός άρρητος.

- Από Λήμμα 4, γνωρίζουμε ότι: ο $x = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$ είναι τετραγωνικός άρρητος. Ωστόσο, από Λήμμα 2, ο $x = [b_0, b_1, \dots, b_m, x]$ είναι τετραγωνικός άρρητος. ▪

Παράδειγμα 1. Ανάπτυξη του $\sqrt{2}$ σε ένα άπειρο απλό συνεχές κλάσμα.

Λύση: Ο μεγαλύτερος ακέραιος, μικρότερος του , $\sqrt{2} = 1.414$ είναι ο $a_1 = 1$ άρα $\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{x_2}$.

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1 \rightarrow \sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος του $x_2 = \sqrt{2} + 1 = 2.414 \ldots$, είναι ο $a_2 = 2$, επομένως: $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}$,

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1 > 1 .$$

Αφού $x_3 = \sqrt{2} + 1$ όπως και το $x_2 = \sqrt{2} + 1$, οι υπολογισμοί των $x_4, x_5, \ldots$ θα παράγουν όλοι το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή τον αριθμό $\sqrt{2} + 1$. Έτσι, όλα τα επόμενα μερικά υπόλοιπα θα είναι ίσα με 2 και η ανάπτυξη του $\sqrt{2}$ θα είναι:

$$\sqrt{2} = 1 + ½ + ½ + \ldots = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}] .$$

Θεωρήματα προσέγγισης άρρητων

Θεώρημα 7:

Τα περιττά αναγωγήματα c_{2n+1} ενός άπειρου απλού συνεχούς κλάσματος σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία και τα άρτια αναγωγήματα c_{2n} σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία. Επίσης, κάθε περιττό αναγώγημα είναι μικρότερο από κάθε άρτιο και κάθε αναγώγημα τάξης $k \geq 3$ βρίσκεται ανάμεσα στα δύο προηγούμενά του αναγωγήματα. Δηλαδή:

$$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots < c_{2n+1} < c_{2n} < \cdots < c_6 < c_4 < c_2.$$

Θεώρημα 8:

Κάθε άπειρο, απλό, συνεχές κλάσμα συγκλίνει σε ένα όριο *l* το οποίο είναι μεγαλύτερο από κάθε περιττό αναγώγημά του και μικρότερο από κάθε άρτιο.

,

<u>Θεώρημα 9:</u>

Για δύο διαδοχικά αναγωγήματα c_{n-1}, c_n ισχύει η σχέση:

$| x - c_n | < | x - c_{n-1} |$, *$n \geq 2$.*

<u>Θεώρημα 10</u>:

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q^2{}_n}$$, *$n \geq 1$.*

<u>Θεώρημα 11</u>:

Αν ο *x* είναι άρρητος, τότε υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ρητών κλασμάτων $\frac{p}{q}, q > 0, (p, q) = 1$ έτσι ώστε $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

Απόδειξη Θεωρήματος 9:

Έστω η ανάπτυξη του δοσμένου άρρητου αριθμού *x* να είναι: $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, x_{n+1}]$, όπου: $x_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$.

Ισχύει: $x = \dfrac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}$, (3) και συνεπώς: $x(x_{n+1}q_n + q_{n-1}) = x_{n+1}p_n + p_{n-1}$,

ή αναδιατάσσοντας, για *n ≥ 2*: $x_{n+1}(xq_n - p_n) = -(xq_{n-1} - p_{n-1}) = -q_{n-1}\left(x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$

Διαιρώντας με $x_{n+1}q_n$, προκύπτει: $x - \dfrac{p_n}{q_n} = \left(-\dfrac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right)\left(x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$

Ισχύει: $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| = \left|\dfrac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right| \cdot \left|x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.$

Γνωρίζουμε ότι για *n ≥ 2*, $x_{n+1} > 1$ και ότι $q_n > q_{n-1} > 0.$

Άρα, $0 < \dfrac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n} < 1$ και συνεπώς: $0 < \left|\dfrac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right| < 1$.

Από την σχέση (3) προκύπτει: $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$, *n ≥ 2* → $|x - c_n| < |x - c_{n-1}|$ (4) .

Η σχέση (4) μας δείχνει ότι το c_n είναι πιο κοντά στο *x* από ότι το c_{n-1} . ▪

Παράδειγμα 2. Να δειχθεί ότι τα πρώτα αναγωγήματα του αριθμού *e* προσεγγίζουν όλο και καλύτερα τον αριθμό.

Λύση: Ο αριθμός *e* ορίζεται, κατά τα γνωστά, ως: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Η δεκαδική του προσέγγιση στο έκτο δεκαδικό ψηφίο είναι: *e – 2.718282* άρα θα υπολογίσουμε

τα επτά πρώτα αναγωγήματα του που είναι: $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}$. Άρα, $\frac{p_7}{q_7} = \frac{106}{39}$

και συνεπώς θα πρέπει να αληθεύει ότι: $|e - \frac{p_7}{q_7}| < \frac{1}{{q_7}^2}$, ή $|e - \frac{106}{39}| < \frac{1}{39^2}$.

$e - \frac{106}{39} = 0.00033264 \ldots < \frac{1}{39^2} = 0.00065746$ και $e - \frac{106}{39} \cong \frac{1}{2}\frac{1}{39^2}$.

<u>Θεώρημα 12:</u>

Από οποιαδήποτε δύο διαδοχικά αναγωγήματα $\frac{p_n}{q_n}$ και $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ του συνεχούς κλάσματος ενός άρρητου *a*, τουλάχιστον ένα ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}\ .$$

<u>Θεώρημα 13</u> (Hurwitz)**:**

Κάθε άρρητος αριθμός *a* έχει έναν άπειρο αριθμό ρητών προσεγγίσεων $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την ανισότητα:

$$|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}\ .$$

<u>Θεώρημα 14:</u>

Κάθε άρρητος αριθμός *b* που δεν είναι ισοδύναμος με τον αριθμό *ξ* διαθέτει έναν άπειρο αριθμό ρητών προσεγγίσεων που επαληθεύουν την ανισότητα:

$$|b - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{8}q^2}\ .$$

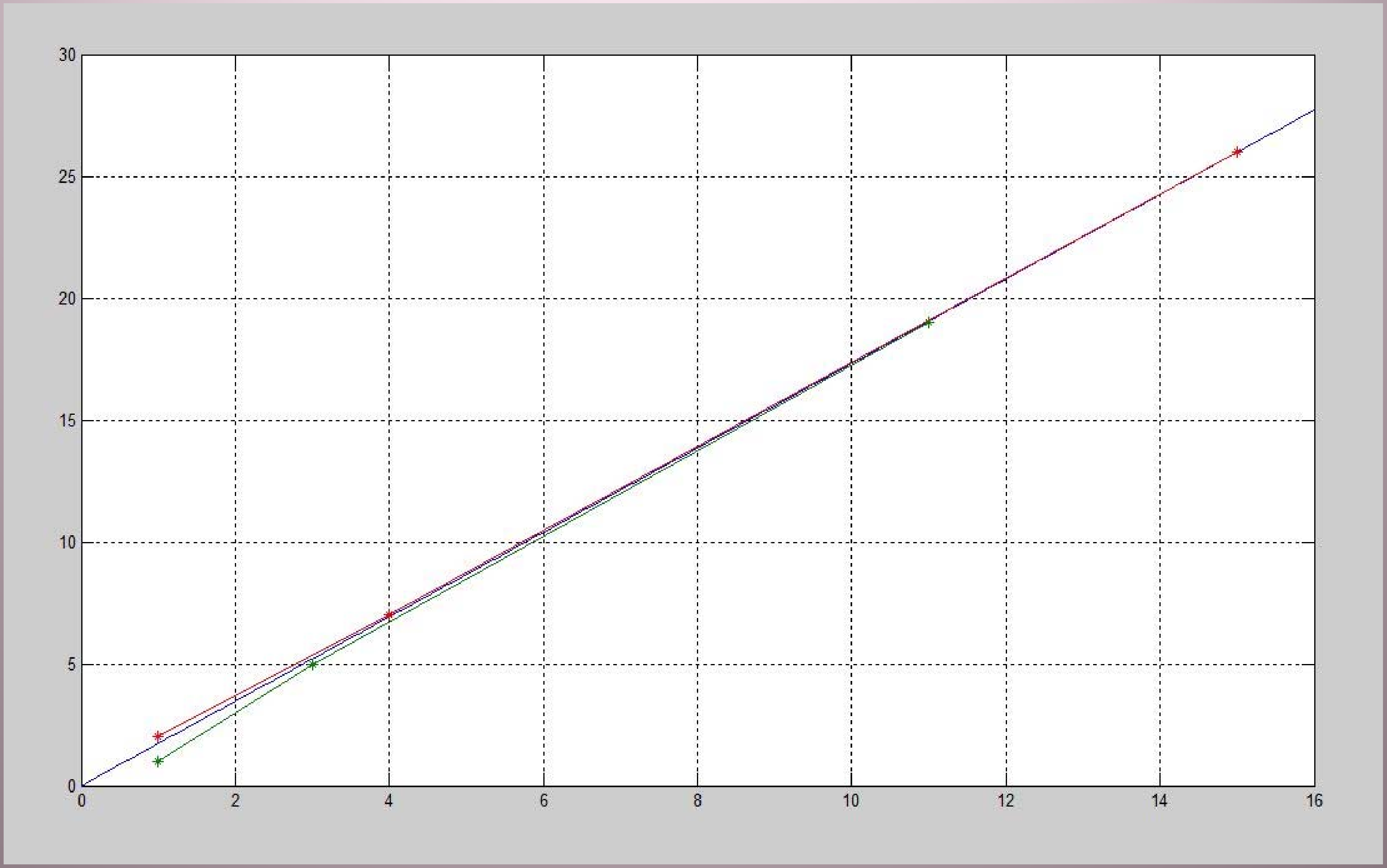
Γεωμετρική ερμηνεία συνεχών κλασμάτων

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, σχεδιάζουμε την ευθεία

y = ax, η οποία δεν περνάει από σημεία με ακέραιες συντεταγμένες διότι τότε *a = y/x* θα ήταν ρητός αριθμός. Έπειτα, υπολογίζουμε τα αναγωγήματα του *a*, για παράδειγμα του $a = \sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots]$. Τα αναγωγήματα είναι: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15},$ … . Τα σημεία που βρίσκονται κάτω

από την γραφική παράσταση *y = √3 x*, περιγράφουν, αντίστοιχα, τα $c_1, c_3, c_5, \ldots$ και είναι όλα μικρότερα από το *√3*. Ανάλογα, τα σημεία που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση, $(q_2, p_2), (q_4, p_4), (q_6, p_6), \ldots$ περιγράφουν τα $c_2, c_4, c_6, \ldots$ και είναι όλα μεγαλύτερα από το *√3*. Ενώνουμε με μια ευθεία τα $(q_1, p_1), (q_3, p_3), (q_5, p_5), \ldots$ και με μία άλλη τα $(q_2, p_2), (q_4, p_4), (q_6, p_6), \ldots$

και σχηματίζονται αντίστοιχα δύο πολυγωνικές γραμμές που προσεγγίζουν όλο και καλύτερα την *y = √3 x*. Το ακόλουθο σχήμα απεικονίζει την *y = √3 x* καθώς και τις δύο πολυγωνικές γραμμές που ενώνουν τα αναγωγήματα.



30
25
20
15
10
5
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16

Εκφράσεις υπερβατικών αριθμών

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cdots}}}}.$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}}.$$

$$e^{\pi} = 23 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{591 + \cdots}}}}}}.$$

$$2^{\sqrt{2}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{72 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}}}}.$$

$$\tan x = \cfrac{1}{\frac{1}{x} - \cfrac{1}{\frac{3}{x} - \cfrac{1}{\frac{5}{x} - \cfrac{1}{\frac{7}{x} - \cdots}}}}.$$

Διοφαντικές εξισώσεις – Εξίσωση Pell

.

Απροσδιόριστη εξίσωση (indeterminate equation) είναι μια εξίσωση που δεν μπορεί να λυθεί με τις δοθείσες πληροφορίες. **Διοφαντική εξίσωση** είναι μια απροσδιόριστη πολυωνυμική εξίσωση που δέχεται μόνο ακέραιες ρίζες. Η γενικευμένη μορφή της είναι: $x^n + y^n = z^n$. Η εξίσωση:

$x^2 - Ny^2 = +1$, με *N* έναν θετικό ακέραιο, όχι τέλειο τετράγωνο και *x, y* άγνωστους ακέραιους, ονομάζεται **εξίσωση Pell**.

Το συνεχές κλάσμα του $\sqrt{N}$ είναι: $\sqrt{N} = [a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_4, a_3, a_2, 2a_1}]$.

Γενική μέθοδος επίλυσης εξίσωσης Pell

Θεώρημα 15:

Αν (x_1, y_1) είναι η ελάχιστη θετική ρίζα της $x^2 - Ny^2 = 1$, τότε όλες οι υπόλοιπες θετικές ρίζες μπορούν να βρεθούν από την εξίσωση:

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Θεώρημα 16:

Αν η $x^2 - Ny^2 = -1$ είναι επιλύσιμη με (x_1, y_1) την ελάχιστη θετική λύση, τότε όλες οι υπόλοιπες θετικές ρίζες (x_n, y_n) υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης: $x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + \sqrt{N}\, y_1)^n, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις ίδιες τιμές , όλες οι θετικές λύσεις της: δίνονται από την σχέση: $x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + \sqrt{N}\, y_1)^n, \quad n = 2, 4, 6, \dots$

Παράδειγμα 3. Εύρεση μερικής λύσης της εξίσωσης: $x^2 - 24y^2 = 1$.

Λύση: *N = 24* άρα από τον πίνακα 1 είναι $\sqrt{24} = [4, \overline{1, 8}] = [a_1, \overline{a_2, 2a_1}]$

και συνεπώς: $a_2 = a_n$ → *n = 2*, άρτιος αριθμός. Εύκολα υπολογίζουμε το αναγώγημα δεύτερης τάξης $c_2 = \frac{5}{1}$, και προκύπτει: $x_1 = p_2 = 5$, $y_1 = q_2 = 1$ και $x_1{}^2 - 24y_1{}^2 = 25 - 24 \cdot 1 = 1$

άρα το ζευγάρι λύσεων $x_1 = 5$, $y_1 = 1$ είναι μια μερική λύση της δοσμένης εξίσωσης.

Παράδειγμα 4. Σύμφωνα με τον πίνακα 1, $(x_1, y_1) = (10, 3)$ είναι η ελάχιστη θετική ρίζα της: $x^2 - 11y^2 = 1$. Μια δεύτερη λύση βρίσκεται από το Θεώρημα 18 για

n = 2.

Άρα, $x_2 - \sqrt{11}y_2 = (10 + 3\sqrt{11})^2 = 199 + 60\sqrt{11}$ → $(x_2, y_2) = (199, 60)$ διότι

$199^2 - 11 \cdot 60^2 = 1$.

Βιβλιογραφία

- C.D. Olds, *Continued Fractions*, Random House, NY (1963)
- A.Y. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press (1964)
- John D. Barrow, *Chaos in Numberland: The secret life of continued fractions* (2000)
- Thomas Koshy, *Elementary number theory with applications*, Amsterdam, London, Elsevier Academic (2007)
- J. Steinig, *Aproof of Lagrange's theory on periodic continued fractions*, Arch. Math., Vol. 59, 21-23 (1992)
- Πουλάκης Μ. Δημήτριος, Θεωρία αριθμών: Μια σύγχρονη θεώρηση της κλασσικής θεωρίας αριθμών (1997)
- Mohamed Mkaouar, *Continued Fractions of Transcendental Numbers*, Τεύχος 45, Δελτίο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας (2001)
- Gerard P. Michon, Ph. D., *Continued Fractions*, ©2000 – 2011
- A. Bogomolny, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles *from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*
- *http://planetmath.org*
- http://*archives.math.utk.edu*
- *www.maths.surrey.ac.uk*
- http://*mathworld.wolfram.com*
- http://*mpec.sc.mahidol.ac.th*
- http://*jwilson.coe.uga.edu*
- *http://www.math.uoc.gr*
- *http://mpla.math.uoa.gr*
- *http://www.ams.org*
- http://*math.overflow.net*
- *http://sprott.physics.wisc.edu*
- http://*journals.cambridge.org*
- *http://en.wikipedia.org*